OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

Problema 1. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $a, n \in \mathbb{N}^*$, au loc:

a) $|x+a|+|x-a^2| \geq a^2+a$;

b) $|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+n|+|x-1^2|+|x-2^2|+\ldots+|x-n^2| \geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) $|x+a|+|x-a^2| \geq |x+a+a^2-x| = a^2+a$;

b) Membrul stâng al relaţiei se scrie:

(2*p*) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(|x+k|+|x-k^2|\right) \geq \sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k$

(2*p*) $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

(1*p*) $= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Problema 2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x]\cdot\{x\} = 1\}$. Demonstraţi că:

a) dacă $x \in A$, atunci $x^2 = [x]^2+\{x\}^2+2$;

b) dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{2016} \in A$ şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2016}$, atunci

$$\{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2016}^2\} = \{x_1\}^2+\{x_2\}^2+\ldots+\{x_{2016}\}^2.$$

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) $x^2 = \left([x]+\{x\}\right)^2 = [x]^2+\{x\}^2+2\cdot[x]\cdot\{x\} = [x]^2+\{x\}^2+2$

(1*p*) *b*) Dacă $x \in A$, atunci $[x] = \dfrac{1}{\{x\}} \geq 2$,

(1*p*) iar dacă $x, y \in A$, atunci $x < y \Rightarrow [x] < [y]$.

(2*p*) Fie acum $x_1, x_2, \ldots, x_{2016} \in A$, cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2016}$. Atunci $[x_1] < [x_2] < \ldots < [x_{2016}]$, de unde, pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., 2016\}$, avem $[x_k] \geq k+1$, adică $\{x_k\}^2 = \dfrac{1}{[x_k]^2} \leq \dfrac{1}{(k+1)^2}$. Deci

$$\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2 \leq \sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{2017} < 1, \text{ adică } \left\{\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\} = \sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2.$$

(1*p*) Aşadar, $\left\{\sum\limits_{k=1}^{2016}{x_k}^2\right\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{2016}[x_k]^2+2\cdot 2016+\sum\limits_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\} = \sum\limits_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2.$

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie 27 m^2 şi O intersecţia diagonalelor sale. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA sunt vârfurile unui paralelogram a cărui arie se cere.

Barem de corectare. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD respectiv, DOA şi P un punct oarecare în plan. Avem:

(2p) $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{PG_2} - \overrightarrow{PG_1} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC})$

(2p) $\overrightarrow{G_4G_3} = \overrightarrow{PG_3} - \overrightarrow{PG_4} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC})$

(1p) Deci $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_4G_3}$, adică $G_1G_2G_3G_4$ este un paralelogram.

(1p) Analog se arată că $\overrightarrow{G_2G_3} = \overrightarrow{G_1G_4} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BD})$, adică paralelogramul $G_1G_2G_3G_4$ are laturile paralele cu diagonalele patrulaterului $ABCD$.

(1p) $\mathcal{A}_{[G_1G_2G_3G_4]} = G_1G_2 \cdot G_1G_4 \cdot \sin(\widehat{G_1G_2, G_1G_4}) = \dfrac{1}{3}AC \cdot \dfrac{1}{3}BD \cdot \sin(\widehat{AC, BD}) = \dfrac{2}{9} \cdot \mathcal{A}_{[ABCD]} = 6\ m^2$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi $(AC) \cap (BD) = \{O\}$. Dacă $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât punctele M, O şi N să fie coliniare, atunci:

a) exprimaţi vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD}$;

b) demonstraţi că $\dfrac{AB}{CD} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{NB}{CN} + \dfrac{MA}{DM}\right)$.

Barem de corectare.

(2p) Notăm $\dfrac{AB}{CD} = k$, $\dfrac{NB}{CN} = q$, $\dfrac{MA}{DM} = p$. Din asemănarea triunghiurilor $\Delta AOB \sim \Delta COD$ rezultă că $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$, de unde, $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = -k \cdot \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB} = -k \cdot \overrightarrow{OD} \end{cases}$

(2p) Din $\dfrac{MA}{DM} = p$, se obţine că $\overrightarrow{OM} = \dfrac{-k \cdot \overrightarrow{OC} + p \cdot \overrightarrow{OD}}{1+p}$,

iar din $\dfrac{NB}{CN} = q$, se obţine că $\overrightarrow{ON} = \dfrac{-k \cdot \overrightarrow{OD} + q \cdot \overrightarrow{OC}}{1+q}$.

(1p) Deoarece vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ sunt coliniari, rezultă că $\dfrac{-k}{q} = \dfrac{p}{-k}$, adică $k^2 = pq$.

(2p) Aşadar, $k = \sqrt{pq} \le \dfrac{p+q}{2}$, de unde se obţine că $\dfrac{AB}{CD} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{NB}{CN} + \dfrac{MA}{DM}\right)$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

Problema 1. Arătaţi că $\left(\dfrac{\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+...+\log_{2015} 2016}{2012}\right)^{2012}>5.$

Barem de corectare. Utilizând inegalitatea dintre media aritmetică şi geometrică se obţine:

(3p) $\left(\dfrac{\log_4 5+\log_5 6+...+\log_{2015} 2016}{2012}\right)^{2012}>\left(\sqrt[2012]{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot...\cdot\log_{2015} 2016}\right)^{2012}$

(2p) $=\log_4 2016$

(2p) $>\log_4 1024=5$

Problema 2. Fie $z_1, z_2\in\mathbb{C}$, astfel încât $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ şi $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că $|z_1-z_2|=1$.

Barem de corectare.

(2p) Se foloseşte faptul că $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$.

(3p) Deoarece, $3=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=2+\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$,

(2p) se obţine $(z_1-z_2)^2=-z_1z_2$, de unde rezultă că $|z_1-z_2|=1$.

Problema 3. Să se determine funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\ln(xy)\le f(x)+f(y)-x-y\le f(xy)-xy,\quad (\forall)\,x,y\in(0,\infty).$$

Barem de corectare.

(2p) Din $\ln(xy)\le f(xy)-xy$, rezultă $f(t)-t\ge\ln t$, $(\forall)\ t\in(0,\infty)$.

(2p) Dacă notăm $f(x)-x=g(x)$, atunci

$$\ln(xy)\le g(x)+g(y)\le g(xy),\quad (\forall)\,x,y\in(0,\infty).$$

Pentru $x=y=1$ avem $0\le 2g(1)\le g(1)$, adică $g(1)=0$.

(3p) Pentru $y=\dfrac{1}{x}$, obţinem:

$$0\le g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)\le 0\Rightarrow g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow (g(x)-\ln x)+\left(g\left(\frac{1}{x}\right)-\ln\frac{1}{x}\right)=0.$$

Cum $g(t)\ge\ln t$, pentru orice $t\in(0,\infty)$, rezultă că $g(x)-\ln x=g\left(\dfrac{1}{x}\right)-\ln\dfrac{1}{x}=0$, adică $f(x)=\ln x+x$.

Problema 4. Se consideră funcţia surjectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ şi funcţia strict crescătoare $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât $f(x) \geq g(x)$, pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{N}$;

b) Calculaţi $f(1) - g(2) + f(3) - g(4) + ... + f(2015) - g(2016)$.

Barem de corectare.

(3*p*) *a*) Deoarece f este surjectivă, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $f(n_0) = 0$. Rezultă $g(n_0) \leq 0$, de unde $g(n_0) = 0$. Dacă $n_0 > 0$, atunci $0 = g(n_0) > g(0) \geq 0$, absurd, deci $n_0 = 0$. Rezultă $f(0) = g(0) = 0$.

(2*p*) Prin inducţie, se arată că $f(n) = g(n) = n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

(2*p*) *b*) Prin calcul direct avem: $f(1) - g(2) + f(3) - g(4) + ... + f(2015) - g(2016) = -1008$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

Problema 1. Să se calculeze:

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+3}\right)$.

Barem de corectare.

$a)$ Limita se mai scrie:

$(1p)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}\right)$

$(2p)$ $=\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=\frac{5}{2}$.

$(2p)$ $b)$ Deoarece, $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+3}\right)=(-1)^n\cdot\sin\left(\pi\sqrt{n^2+3}-n\pi\right)$, obţinem:

$(2p)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+3}\right)=(-1)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+3}-n\pi\right)=0$.

Problema 2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Să se calculeze A^{2016}.

Barem de corectare.

$(2p)$ Matricea A se poate scrie $A=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$(1p)$ Deoarece $B^k=3^{k-1}\cdot B$, pentru $k\geq1$, obţinem

$(3p)$ $A^n=(I_3+B)^n=I_3+\sum\limits_{k=1}^{2016}C_n^k\cdot B^k=I_3+\left(\sum\limits_{k=1}^{2016}C_n^k\cdot3^{k-1}\right)\cdot B$

$$=I_3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{2016}C_n^k\cdot3^k-1\right)\cdot B=I_3+\frac{4^{2016}-1}{3}\cdot B$$

$(1p)$ adică, $A^{2016}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4^{2016}+2&4^{2016}-1&4^{2016}-1\\4^{2016}-1&4^{2016}+2&4^{2016}-1\\4^{2016}-1&4^{2016}-1&4^{2016}+2\end{pmatrix}$.

Problema 3. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\operatorname{tr} A \neq 0$ şi $\det\left(A^2 + (\det A + x) \cdot I_2\right) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $4 \cdot \det A \geq (\operatorname{tr} A)^2$.

Barem de corectare.

(1p) Deoarece $A^2 - \operatorname{tr} A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$,

(1p) avem $\det\left(A^2 + (\det A + x) \cdot I_2\right) = \det\left(\operatorname{tr} A \cdot A + x \cdot I_2\right)$.

(2p) Dar cum, $\det\left(\operatorname{tr} A \cdot A + x \cdot I_2\right) = x^2 + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot x + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det A$,

(1p) condiţia din enunţ este echivalentă cu $x^2 + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot x + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det A \geq 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$,

(1p) adică $\Delta = (\operatorname{tr} A)^4 - 4(\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det A \leq 0$,

(1p) de unde obţinem că $4 \det A \geq (\operatorname{tr}(A))^2$.

Problema 4. Arătaţi că nu există nicio funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, astfel încât

$$f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y), \qquad (\forall)\ x, y > 0.$$

Barem de corectare.

(1p) Din $f(x) \geq f(x+y)\left(1 + \dfrac{y}{f(x)}\right) > f(x+y)$, rezultă că funcţia f este strict descrescătoare.

(1p) Pentru $y = f(x)$, obţinem $f(x + f(x)) \leq \dfrac{f(x)}{2}$.

(1p) Fie $a > 0$ ales arbitrar. Construim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, astfel: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n + f(x_n) \end{cases}$.

(1p) Din $f(x_{n+1}) = f(x_n + f(x_n)) \leq \dfrac{f(x_n)}{2}$, obţinem că $f(x_n) \leq \dfrac{f(x_0)}{2^n}$, pentru $n \geq 0$.

(1p) Aşadar, $x_{n+1} = x_0 + f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leq x_0 + f(x_0)\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right) < x_0 + 2f(x_0)$, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior.

(1p) Din $x_n < x_0 + 2f(x_0)$, $f(x_n) \leq \dfrac{f(x_0)}{2^n}$ şi monotonia lui f, avem $0 < f(x_0 + 2f(x_0)) \leq f(x_n) \leq \dfrac{f(x_0)}{2^n}$,

(1p) de unde, trecând la limită, obţinem că $0 < f(x_0 + 2f(x_0)) \leq 0$, ceea ce constituie o contradicţie. Deci nu există nicio funcţie f care să verifice proprietatea dată.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

Problema 1. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2016}\,\mathrm{d}x, \quad x\in(0;\infty)$.

Barem de corectare. Dacă notăm cu I integrala din enunţ, avem:

(2p) $\displaystyle I=\int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+10)(6x^2+17x+12)+2016}\,\mathrm{d}x$

(3p) $\displaystyle =\int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+11)^2+2015}\,\mathrm{d}x$

(2p) $\displaystyle =\frac{1}{\sqrt{2015}}\cdot arctg\frac{6x^2+17x+11}{\sqrt{2015}}+\mathcal{C}.$

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ având elementul neutru e şi $x,y\in G$. Să se arate că dacă $x^2=e$ şi $xyx=y^3$, atunci $y^8=e$.

Barem de corectare.

(1p) Arătăm că $y^9=y$. Într-adevăr,

(2p) $y^9=y^3\cdot y^3\cdot y^3=xyx\cdot xyx\cdot xyx$

(1p) $=x\cdot y^3\cdot x$

(2p) $=x\cdot xyx\cdot x=x^2\cdot y\cdot x^2=y,$

(1p) de unde, $y^8=e$.

Problema 3. Să se arate că dacă H_1 şi H_2 sunt două subgrupuri ale unui grup $(G,\cdot)$, astfel încât $G=H_1\cup H_2$, atunci $H_1=G$ sau $H_2=G$.

Barem de corectare.

(1p) Presupunem contrariul. Dacă $H_1\neq G$ şi $H_2\neq G$,

(1p) atunci $H_1\setminus H_2\neq\emptyset$ şi $H_2\setminus H_1\neq\emptyset$.

(2p) Fie $h_1\in H_1\setminus H_2$ şi $h_2\in H_2\setminus H_1$. Din $h_1\cdot h_2\in G=H_1\cup H_2$, deducem că $h_1\cdot h_2\in H_1$ sau $h_1\cdot h_2\in H_2$.

(2p) Deoarece, $(h_1\cdot h_2\in H_1\Rightarrow h_2\in H_1)$, iar $(h_1\cdot h_2\in H_2\Rightarrow h_1\in H_2)$, în ambele cazuri obţinem contradicţii cu alegerea elementelor $h_1\in H_1\setminus H_2$ şi $h_2\in H_2\setminus H_1$.

(1p) Aşadar, $H_1=G$ sau $H_2=G$.

Problema 4. Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că

$$(b-a)\cdot f'(x)\leq k,\ (\forall)\ x\in[a,b].$$

Să se arate că $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \frac{k}{2}+f(a)$.

Barem de corectare.

($2p$) Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a,x]$, deducem că exstă $c_x\in(a,x)$ astfel ca $f(x)-f(a)=f'(c_x)(x-a)$.

($2p$) Deoarece $f'(x)\leq \frac{k}{b-a},\ (\forall)\ x\in[a,b]$, obţinem că $f(x)\leq \frac{k}{b-a}\cdot(x-a)+f(a),\ (\forall)\ x\in[a,b]$, de unde

($1p$) $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b\left(\frac{k}{b-a}(x-a)+f(a)\right)\mathrm{d}x$

($1p$) $\quad = (b-a)\left(\frac{k}{2}+f(a)\right)$, adică

($1p$) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \frac{k}{2}+f(a)$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.